МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ ГИПЕРРАДИКАЛЬНОЙ ФОРМАЦИИ

С.Ф. Каморников

Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал, Гомель, Беларусь

ONE EXAMPLE OF HYPERRADICAL FORMATION

S.F. Kamornikov

Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel, Belarus

Устанавливается существование гиперрадикальных формаций, которые не являются наследственными.

Ключевые слова: *формация, гиперрадикальная формация, сверхрадикальная формация, конечная группа.*

The existence of hyperradical formations which are not hereditary is established.

Keywords: *formation, hyperradical formation, superradical formation, finite group.*

Введение

Как отмечено в [1]–[2], понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы, введенное в классе конечных разрешимых групп Картером и Хоуксом [3], а в произвольном случае – Л.А. Шеметковым [4], сформировало в теории конечных групп содержательные направления, связанные с изучением гиперрадикальных и сверхрадикальных формаций. Оба объекта, интересные своим дуализмом с формациями Фиттинга, нашли замечательные приложения (в первую очередь, для изучения решеточных и факторизационных свойств конечных групп).

Понимание значимости гиперрадикальных и сверхрадикальных формаций привело к постановке задач их полного описания. К настоящему времени большой прогресс в решении этих задач достигнут в случае наследственных формаций. В частности, в работах [5]–[6] описаны все разрешимые гиперрадикальные формации. При этом доказано, что любая разрешимая гиперрадикальная формация является наследственной. Из результатов работы [7] следует описание наследственных насыщенных гиперрадикальных формаций в классе всех конечных групп. Что касается сверхрадикальных формаций, то отметим лишь работы [8]–[11] последних лет, в которых построены широкие серии наследственных насыщенных гиперрадикальных формаций.

В то же время, за последние два десятилетия обращения к отмеченным задачам не найдено ни одного примера гиперрадикальной или сверхрадикальной формации, которая не является наследственной. Первые такие примеры строятся в данной работе.

1 Основные определения

Рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [12].

Напомним, что *формация* – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

такая, что

$$H_{i-1} / Core_{H_{i-1}}(H_i) \in \mathfrak{F}$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Мы используем запись $s\mathfrak{F}$ ($s_n\mathfrak{F}$) для обозначения класса всех групп G, для которых $G \subseteq H \in \mathfrak{F}$ (класса всех групп G таких, что $G \triangleleft H \in \mathfrak{F}$). Если $s\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$ ($s_n\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$), то класс $\mathfrak{F}$ называется *наследственным* (*нормально наследственным*).

Формация $\mathfrak{F}$ называется *гиперрадикальной*, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная формация;

2) любая группа $G = <A, B>$, где A и B – $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, принадлежит $\mathfrak{F}$.

Класс Фиттинга – это нормально наследственный класс, обладающий тем свойством, что из $G = AB$, где $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *сверхрадикальной*, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная формация;

2) любая группа $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, принадлежит $\mathfrak{F}$.

Простая проверка определений показывает, что каждая гиперрадикальная формация является сверхрадикальной. Обратное утверждение неверно, на что указывает следующий пример из [10].

Пусть $G \cong Sz(2^3)$ и $\pi = \pi(G) = \{2, 5, 7, 13\}$. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, обладающая таким локальным экраном f, что $f(q)$ – класс всех групп, являющихся расширением разрешимых групп с помощью конечных прямых произведений групп, изоморфных G, если $q \in \pi$, и $f(q)$ – класс всех разрешимых групп, если $q \notin \pi$.

Тогда:

1) $\mathfrak{F}$ является наследственной насыщенной сверхрадикальной формацией;

2) если H – критическая группа формации $\mathfrak{F}$, имеющая единичную подгруппу Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений:

а) H – простая неабелева группа из следующего списка: $PSL_2(2^p)$, p – простое число; $PSL_2(3^p)$, p – нечетное простое число; $PSL_2(p)$, p – простое число, большее 3, для которого $p^2 + 1 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 5)$; $Sz(2^p)$, p – нечетное простое число; $PSL_3(3)$; $Sz(2^9)$;

б) H – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем N (N – прямое произведение групп, изоморфных G) и H/N – группа простого порядка $q \in \pi(G)$;

в) H – примитивная группа с абелевым цоколем N и $H = [N]M$, где $(|N|, |M|) = 1$ и $M / \Phi(M) \cong G$.

Из описания наследственных насыщенных гиперрадикальных формаций, вытекающего из работы [7], следует, что формация $\mathfrak{F}$ не является гиперрадикальной.

Напомним, что группа G называется *примитивной*, если она обладает такой максимальной подгруппой M, что $Core_G(M) = 1$. В этом случае подгруппа M называется *примитиватором* группы G. Через $Core_G(M)$ обозначается *ядро* подгруппы M в группе G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в подгруппе M.

2 Предварительные результаты

Следующий фундаментальный результат о примитивных группах, принадлежащий Бэру [13], мы приведем в виде леммы.

***Лемма* 2.1.** *Пусть G – примитивная группа и M – ее примитиватор. Тогда справедливо одно из следующих утверждений*:

(1) *группа G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой N, подгруппа N является абелевой и M – дополнение к N в G*;

(2) *группа G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой N, подгруппа N является неабелевой и M – добавление к N в G*;

(3) *группа G обладает двумя неабелевыми минимальными нормальными подгруппами N и N^* и M является дополнением в группе G к подгруппам N и N^*; $C_G(N) = N^*$, $C_G(N^*) = N$ и $N \simeq N^* \simeq NN^* \cap M$; если V – максимальная подгруппа группы G и $VN = VN^* = G$, то $V \cap N = V \cap N^* = 1$.*

Следуя [12], класс всех примитивных групп будем обозначать через $\mathfrak{P}$. Если группа G примитивна, то полагаем, что $G \in \mathfrak{P}_i$, если группа G удовлетворяет условию (i) леммы 2.1 ($i = 1, 2$ или 3).

Нам понадобятся следующие два результата из [12], которые мы также приведем в виде лемм.

***Лемма* 2.2** [12, лемма А.15.4]. *Если M – максимальная подгруппа группы G, то $G / Core_G(M)$ – примитивная группа.*

Если A – некоторая группа, то через $form(A)$ обозначается наименьшая формация, содержащая группу A, а через $\mathrm{Fit}(A)$ – наименьший класс Фиттинга, содержащий A.

***Лемма* 2.3** [12, пример II.2.12]. *Пусть A – простая неабелева группа. Тогда $form(A) = \mathrm{Fit}(A)$. Кроме того, тогда и только тогда группа G принадлежит формации $form(A)$, когда G представима в виде прямого произведения групп, изоморфных A.*

***Лемма* 2.4.** *Пусть A – простая неабелева группа и $\mathfrak{F} = form(A)$. Если M – $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа группы G, то либо $G / Core_G(M) \in \mathfrak{P}_2$, либо $G / Core_G(M) \in \mathfrak{P}_3$.*

Доказательство. Из определения $\mathfrak{F}$-нормальной максимальной подгруппы следует, что $G / Core_G(M) \in \mathfrak{F}$. Поэтому ввиду леммы 2.3 группа $G / Core_G(M)$ представима в виде прямого произведения групп, изоморфных A. В частности, каждая минимальная нормальная подгруппа группы $G / Core_G(M)$ является неабелевой. Отсюда и из лемм 2.1 и 2.2 следует, что либо $G / Core_G(M) \in \mathfrak{P}_2$, либо $G / Core_G(M) \in \mathfrak{P}_3$. Лемма доказана.

***Лемма* 2.5.** *Пусть A – простая неабелева группа и $\mathfrak{F} = form(A)$. Если M – $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа группы G и $M \in \mathfrak{F}$, то $G / Core_G(M) \in \mathfrak{P}_3$.*

Доказательство. Из леммы 2.4 следует, что либо $G / Core_G(M) \in \mathfrak{P}_2$, либо $G / Core_G(M) \in \mathfrak{P}_3$. Предположим, что $G / Core_G(M) \in \mathfrak{P}_2$. Тогда группа $G / Core_G(M)$ имеет единственную минимальную нормальную подгруппу. Поэтому из $G / Core_G(M) \in \mathfrak{F}$ ввиду леммы 2.3 имеем, что

$G / Core_G(M) \simeq A$. Так как $\mathfrak{F}$ является формацией и $M \in \mathfrak{F}$, то $M / Core_G(M) \in \mathfrak{F}$. Отсюда и из $G / Core_G(M) \simeq A$ следует, что группа A содержит максимальную подгруппу, принадлежащую формации $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 2.3 это невозможно. Пришли к противоречию. Следовательно, $G / Core_G(M) \in \mathfrak{P}_3$. Лемма доказана.

***Лемма* 2.6.** *Пусть A – простая неабелева группа и $\mathfrak{F} = form(A)$. Если M – $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа группы G и $M \in \mathfrak{F}$, то $G / Core_G(M) \simeq A \times A$ и $M / Core_G(M) \simeq A$.*

Доказательство. Ввиду леммы 2.5 группа $G / Core_G(M)$ принадлежит классу $\mathfrak{P}_3$, а значит, имеет две минимальные нормальные подгруппы. Кроме того, из $G / Core_G(M) \in \mathfrak{F}$ ввиду леммы 2.3 следует, что группа $G / Core_G(M)$ представима в виде прямого произведения групп, изоморфных A. Поэтому $G / Core_G(M) \simeq A \times A$. Так как $\mathfrak{F}$ является формацией и $M \in \mathfrak{F}$, то

$$M / Core_G(M) \in \mathfrak{F}.$$

Поэтому либо $M / Core_G(M) \simeq A \times A$, либо $M / Core_G(M) \simeq A$. Так как $M / Core_G(M)$ – собственная подгруппа группы $G / Core_G(M)$, то $M / Core_G(M) \simeq A$. Лемма доказана.

***Лемма* 2.7.** *Пусть A – простая неабелева группа и $\mathfrak{F} = form(A)$. Если M – $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа группы G и $M \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Ввиду леммы 2.6 имеем, что $G / Core_G(M) \simeq A \times A$ и $M / Core_G(M) \simeq A$. Так как $M \in \mathfrak{F}$, то на основании леммы 2.3 подгруппа M представима в виде $M = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_i \simeq A$ для всех $i = 1, 2, \ldots, t$. Отметим, что из $M / Core_G(M) \simeq A$ следует, что $t \geq 1$. Так как $Core_G(M) \lhd M$, то ввиду леммы A.4.14 из [12], не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $Core_G(M) = A_2 \times \ldots \times A_t$. Так как $Core_G(M) \lhd G$, то $C_G(Core_G(M)) \lhd G$. Поэтому

$$C_G(Core_G(M)) \cdot Core_G(M)$$

– нормальная подгруппа группы G. Так как $M = A_1 \times Core_G(M)$, то подгруппа M содержится в $C_G(Core_G(M)) \cdot Core_G(M)$. Отсюда и из максимальности подгруппы M следует, что

$$C_G(Core_G(M)) \cdot Core_G(M) = G.$$

Так как $Core_G(M) = A_2 \times \ldots \times A_t$ и для любого $i = 2, \ldots, t$ подгруппа A_i является неабелевой, то

$$C_G(Core_G(M)) \cap Core_G(M) = 1.$$

Следовательно,

$$G = C_G(Core_G(M)) \times Core_G(M).$$

Так как формация $\mathfrak{F}$ является нормально наследственной, то $Core_G(M) \in \mathfrak{F}$. Ввиду изоморфизма

$$C_G(Core_G(M)) \simeq$$
$$\simeq C_G(Core_G(M)) \times Core_G(M) / Core_G(M) =$$
$$= G / Core_G(M) \simeq A \times A$$

и леммы 2.3 имеем также, что $C_G(Core_G(M)) \in \mathfrak{F}$. Так как класс $\mathfrak{F}$ является формацией, то из $Core_G(M) \in \mathfrak{F}$, $C_G(Core_G(M)) \in \mathfrak{F}$ и

$$C_G(Core_G(M)) \cap Core_G(M) = 1$$

имеем окончательно, что $G \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

3 Основные результаты

Следующая теорема имеет самостоятельное значение.

***Теорема* 3.1.** *Пусть A – простая неабелева группа и $\mathfrak{F} = form(A)$. Если H – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G и $M \in \mathfrak{F}$, то либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп*

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

такая, что

$$H_{i-1} / Core_{H_{i-1}}(H_i) \simeq A \times A \text{ и } H_i / Core_{H_{i-1}}(H_i) \simeq A$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Если H – $\mathfrak{F}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G и $H \neq G$, то по определению существует максимальная цепь подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_k = H$$

такая, что

$$G_{i-1} / Core_{G_{i-1}}(G_i) \in \mathfrak{F}$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, k$.

Применим индукцию по k. Отметим, что H – $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G_{k-1}. Поэтому ввиду леммы 2.6 $G_{k-1} / Core_{G_{k-1}}(H) \simeq A \times A$ и $H / Core_{G_{k-1}}(H) \simeq A$. Кроме того, ввиду леммы 2.7 $G_{k-1} \in \mathfrak{F}$.

Рассмотрим теперь максимальную цепь

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{k-1}.$$

Так как ее длина равна $k-1$, а подгруппа G_{k-1} является $\mathfrak{F}$-субнормальной в G и принадлежит формации $\mathfrak{F}$, то по индукции существует максимальная цепь подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_{n-1} = G_{k-1}$$

такая, что

$$H_{i-1} / Core_{H_{i-1}}(H_i) \simeq A \times A \text{ и } H_i / Core_{H_{i-1}}(H_i) \simeq A$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Положим теперь $H_n = H$. Тогда максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

является искомой. Теорема доказана.

***Лемма* 3.1.** *Пусть A – простая неабелева группа и $\mathfrak{F} = form(A)$. Если группа G обладает $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой, принадлежащей формации $\mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть H – $\mathfrak{F}$-субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G. Если $H = G$, то утверждение леммы очевидно. Значит, $H \neq G$. Тогда по определению существует максимальная цепь подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_k = H$$

такая, что

$$G_{i-1} / Core_{G_{i-1}}(G_i) \in \mathfrak{F}$$

для всех $i = 1, 2, ..., k$.

Применим индукцию по k. Рассмотрим максимальную цепь $G_1 \supset ... \supset G_k = H$. Так как ее длина равна $k-1$, а подгруппа H является $\mathfrak{F}$-субнормальной в G_1 и принадлежит формации $\mathfrak{F}$, то по индукции $G_1 \in \mathfrak{F}$. Отсюда ввиду леммы 2.7 следует, что группа G принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

***Теорема* 3.2.** *Если A – простая неабелева группа, то формация $\mathfrak{F} = form(A)$ является гиперадикальной.*

Доказательство. Ввиду леммы 2.3 формация $\mathfrak{F}$ является нормально наследственной. Пусть $G = < C, B >$, где C и B – $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G. Тогда ввиду леммы 3.1 группа G принадлежит $\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ – гиперрадикальная формация. Теорема доказана.

Следствие. *Если A – простая неабелева группа, то формация $\mathfrak{F} = form(A)$ является сверхрадикальной.*

Замечание. Формация $\mathfrak{F}$ называется *решеточной*, если в любой группе множество всех ее $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп. В [7] доказано, что каждая наследственная насыщенная решеточная формация является гиперрадикальной.

В [1, с. 182] поставлен вопрос 3.5.5 о существовании решеточных формаций, которые не являются наследственными. Очевидно, построенный в теореме 3.2 пример ответ на этот вопрос не дает.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каморников*, *С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 2003. – 256 с.

2. *Ballester-Bolinches*, *A.* Classes of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer, 2006. – 385 p.

3. *Carter*, *R.* The $\mathfrak{F}$-normalisers of a finite soluble group / R. Carter, T. Hawkes // J. Algebra. – 1967. – Vol. 5, № 2. – P. 175–202.

4. *Шеметков*, *Л.А.* Ступенчатые формации групп / Л.А. Шеметков // Матем. сб. – 1974. – Т. 94, № 4. – С. 628–648.

5. *Васильев*, *А.Ф.* Гиперрадикальные формации конечных разрешимых групп / А.Ф. Васильев // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6. – С. 62–70.

6. *Каморников*, *С.Ф.* Разрешимые гиперрадикальные формации / С.Ф. Каморников // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 4 (17). – С. 55–58.

7. *Васильев*, *А.Ф.* О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие к ним алгебраические системы. – Киев : Ин-т математики АН Украины, 1993. – С. 27–54.

8. *Каморников*, *С.Ф.* Критические группы наследственной локальной сверхрадикальной формации / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 2 (15). – С. 66–75.

9. *Семенчук*, *В.Н.* О конечных группах, факторизуемых обобщенно субнормальными подгруппами / В.Н. Семенчук, В.Ф. Велесницкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 4 (13). – С. 58–60.

10. *Каморников*, *С.Ф.* Об одном классе наследственных насыщенных сверхрадикальных формаций / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журнал. – 2014. – Т. 55, № 1. – С. 97–108.

11. *Ballester-Bolinches*, *A.* On a problem of L.A. Shemetkov on superradical formations of finite groups / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyanov // J. Algebra. – 2014. – Vol. 403. – P. 69–76.

12. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

13. *Baer*, *R.* Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.

Поступила в редакцию 17.03.14.